Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2025

EXAMEN FINAL - 13/03/2025

Apellido y Nombre: ....

Número de Documento: .... Especialidad:...

TEMA 2

1	2	3	4	5	NOTA

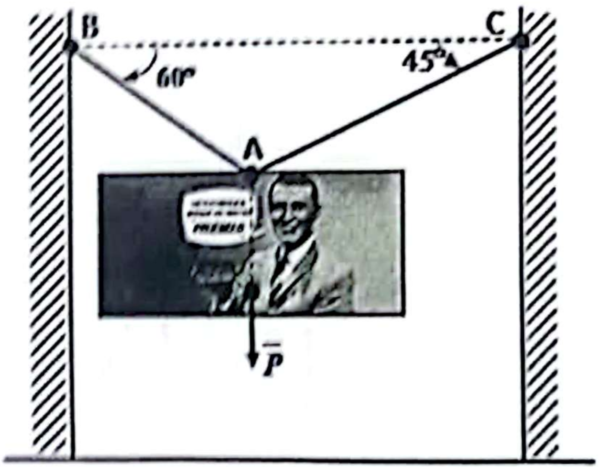
- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- Todas las respuestas deben estar justificadas.

EJERCICIO 1: Dadas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = \cos x$, dar todas las soluciones de la ecuación

$$(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}^2 x$$

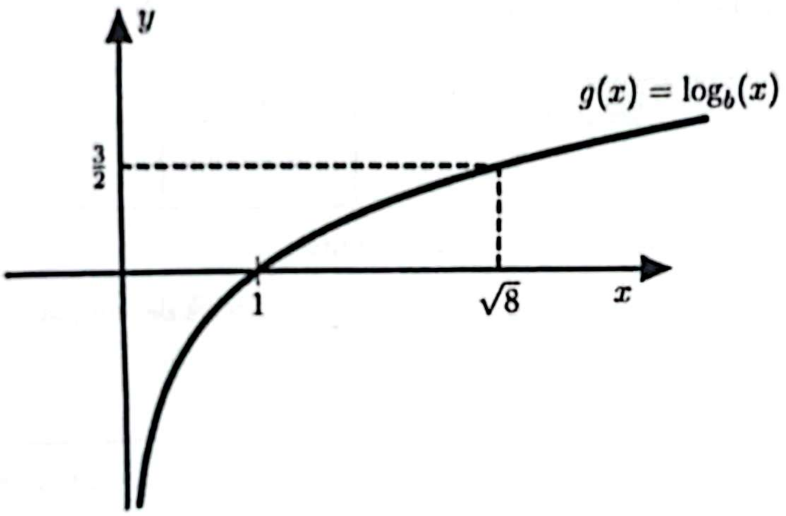
en el intervalo $[0, 4\pi]$.

EJERCICIO 2: (a) Un cartel publicitario de peso 1800 N se mantiene suspendido entre dos paredes, a través de las cuerdas AB y AC, como se muestra en la figura. Determinar los módulos de las fuerzas ejercidas en Newton por ambas cuerdas, suponiendo las mismas rígidas y de peso despreciable.



(b) Dados los vectores $\vec{v} = (-1,\, 3)$ y $\vec{w} = (4,\, 1)$, calcular el módulo del vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{v} + \vec{w}$.

EJERCICIO 3: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2^{2x+1} - 2^{x+5} + 16$, y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función cuya gráfica es la siguiente:

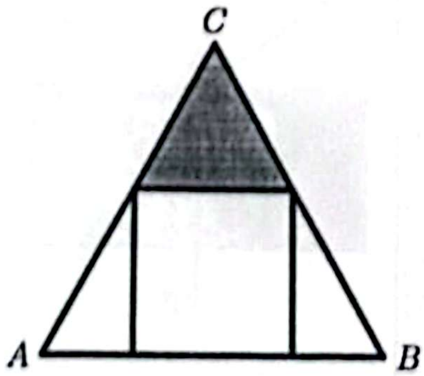


Hallar las soluciones de la ecuación

$$f(x) = g^{-1}(x).$$

EJERCICIO 4: Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = 6x^3 + 8x^2 - 2x + 5$, y f la función cuadrática cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(2,\, -6)$ y su vértice es el punto $(1,\, -5)$. Se define $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(x) = g(x) + f(x)$. Calcular los ceros de la función h.

EJERCICIO 5: En el triángulo equilátero $\triangle ABC$ de lado $8\,cm$ se inscribe un cuadrado como muestra la figura. Calcular el área del triángulo sombreado.



FINAL	Seminario Universitario	HOJA Nº 1/3 FECHA 13-3-25

$\boxed{Ej 1}$ Dadas las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = \cos(x)$ dar todas las sol. de la ec.:

$$f\circ g(x) = \operatorname{sen}^2(x) \quad \text{en } [0, 4\pi]$$

$$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(\cos(x)) = \frac{1}{2}\cos x + \cancel{1} = \operatorname{sen}^2(x) = \cancel{1} - \cos^2(x)$$

identidad trigonométrica

$$\cos^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x) = 0 = \underbrace{\cos(x)}_{=0}\underbrace{\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right)}_{=0}$$

$\cos(x) = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

$k = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ ✓

$k = 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}\pi}$ ✓

$k = 2 \rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}\pi}$ ✓

$k = 3 \rightarrow \boxed{x = \frac{7}{2}\pi}$ ✓

$k = 4 \rightarrow \cancel{x = \frac{9}{2}\pi}$

$\cos(x) = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ | $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

$k = 0$: $\boxed{x = \frac{2}{3}\pi}$ ✓ | $\boxed{x = \frac{4}{3}\pi}$ ✓

$k = 1$: $\boxed{x = \frac{8}{3}\pi}$ ✓ | $\boxed{x = \frac{10}{3}\pi}$ ✓

$k = 2$: $\cancel{x = \frac{14}{3}\pi}$ | $\cancel{x = \frac{16}{3}\pi}$

$k = 3$

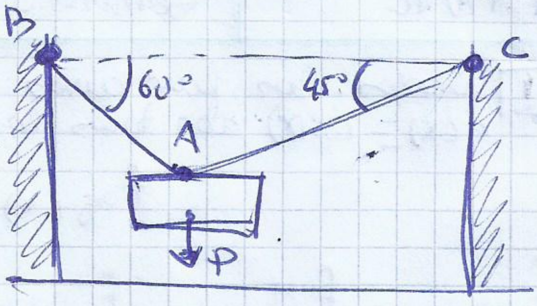
$k = 4$

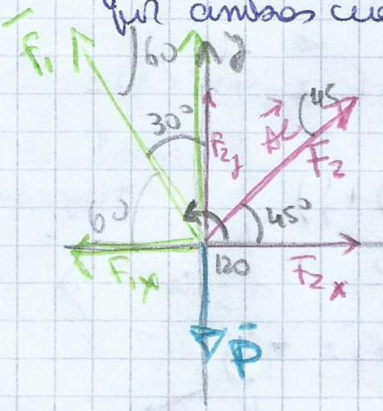
$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi\right\}}$$

NOTA

EJ 2 a) Un cartel publicitario de peso 1800 N se mantiene suspendido entre dos paredes a través de las cuerdas AB y AC, como se muestra en la fig.

Determinar los módulos de las fuerzas ejercidas, en Newton por ambas cuerdas.





$$\underline{\sum F_x = 0}$$

$$F_{1x} = F_{2x}$$

$$\boxed{F_1 \underbrace{\cos(60)}_{1/2} = F_2 \underbrace{\cos(45)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\underline{\sum F_y = 0}$$

$$F_{1y} + F_{2y} = P$$

$$F_1 \overbrace{\operatorname{sen}(120)}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + F_2 \operatorname{sen}(45) = 1800N$$

$$\begin{cases} 0{,}5F_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}F_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}F_2 = 1800\,N \end{cases}$$

$$\boxed{F_1 = 1318\,N \quad | \quad F_2 = 932\,N}$$

b) Dados los vectores $\vec{v} = (-1,3)$ y $\vec{w} = (4,1)$ calcular el módulo del vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{v} + \vec{w}$

$$\vec{v} + \vec{w} = (-1,3) + (4,1) = (3,4) = \vec{v} + \vec{w}$$

$$\| \operatorname{proy}_{\vec{v}+\vec{w}} \vec{v} \| = \left\| \frac{\vec{v} \cdot (\vec{v}+\vec{w})}{\|(\vec{v}+\vec{w})\|^2} \cdot (\vec{v}+\vec{w}) \right\| = \left\| \frac{(-1,3)\,(3,4)\,\|\cdot\|(3,4)\|}{\|(3,4)\|^{\cancel{2}}} \right\| =$$

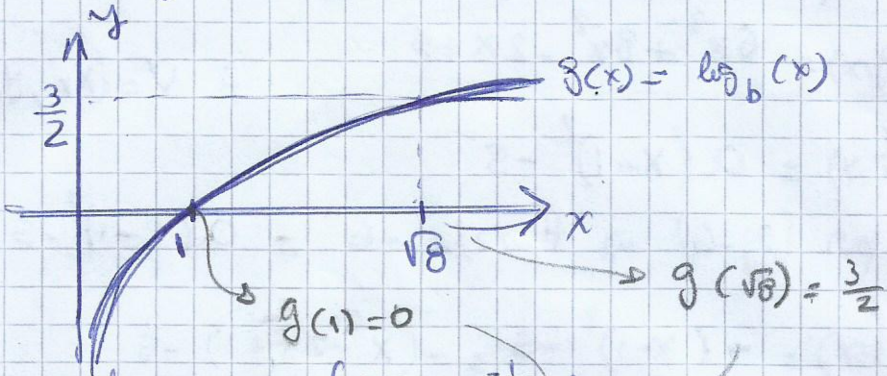
$$= \frac{-3 + 12}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{9}{5}$$

$$\boxed{\| \operatorname{proy}_{\vec{v}+\vec{w}} \vec{v} \| = 9/5}$$

NOTA

FINAL	Seminario Universitario	HOJA N° 2/3 FECHA 13-3-25

$\boxed{\text{Ej 3}}$ Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f(x) = 2^{2x+1} - 2^{x+5} + 16$ y $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ la función cuya gráfica es la sig:



Hallar las soluciones de la ec. $f(x) = g^{-1}(x)$

Hallo g(x):

$g(1) = \log_b(1) = 0$ ✓

$g(\sqrt{8}) = \log_b(\sqrt{8}) = \frac{3}{2} \rightarrow b^{3/2} = \sqrt{8}$

$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$

$(b^{3/2})^{2/3} = (\sqrt{8})^{2/3}$

$b = (8^{1/2})^{2/3}$

$b = 8^{1/3} = \sqrt[3]{8}$

$\boxed{b = 2}$

$\boxed{g(x) = \log_2(x)}$

Hallo g^{-1} $\longrightarrow$

$y = \log_2(x)$

$2^y = 2^{\log_2(x)}$

$2^y = x \longrightarrow g^{-1}(y) = 2^y$ $\boxed{g^{-1}(x) = 2^x}$

Hallo x tal que $f(x) = g^{-1}(x)$

$\underbrace{2^{2x+1}} - 2^{x+5} + 16 = 2^x$

$2^{2x} = (2^x)^2$

$2^{2x}.2 - 2^x.2^5 + 2^4 - 2^x = 0$

$2(2^x)^2 - 33(2^x) + 16 = 0$

$z = 2^x$

$2z^2 - 33z + 16 = 0$

$z = 16 = 2^x$ (I)

$z = 1/2 = 2^x$

(I) $2^x = 16 \rightarrow \boxed{x = 4}$

(II) $2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \rightarrow \boxed{x = -1}$

$\boxed{S = \{-1; 4\}}$

NOTA

$\boxed{\Rightarrow 4}$ Sean $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = 6x^3 + 8x^2 - 2x + 5$ y f la función cuadrática cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(2, -6)$ y su vértice es el punto $(1, -5)$.

Se define $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $h(x) = g(x) + f(x)$. Calcular los ceros de h

$\boxed{g(x) = 6x^3 + 8x^2 - 2x + 5}$

$V = (x_v, y_v) = (1, -5)$

$f(x) = a(x-1)^2 - 5$

pasa por $(2, -6) \rightarrow f(2) = -6 = a(2-1)^2 - 5 = \underbrace{a - 5 = -6}_{\boxed{a = -1}}$

$f(x) = -(x-1)^2 - 5 = -(x^2 - 2x + 1) - 5$

$f(x) = -x^2 + 2x - 1 - 5 \rightarrow \boxed{f(x) = -x^2 + 2x - 6}$

Hallo $h(x)$

$h(x) = g(x) + f(x)$

$h(x) = 6x^3 + 8x^2 \cancel{-2x} + 5 + (-x^2) \cancel{+2x} - 6$

$\boxed{h(x) = 6x^3 + 7x^2 - 1}$

Si Gauss $\rightarrow$ posibles raíces: $\frac{\pm 1}{\pm 6}$; $\frac{\pm 1}{\pm 3}$; $\frac{\pm 1}{\pm 2}$; ± 1

Pruebo con: $1 \rightarrow h(1) = 6 + 7 - 1 \neq 0$

$-1 \rightarrow h(-1) = -6 + 7 - 1 = 0 \rightarrow \underbrace{\boxed{x = -1 \text{ es raíz}}}$

$q(x) = x + 1$ divide a $h(x)$

Ruffini

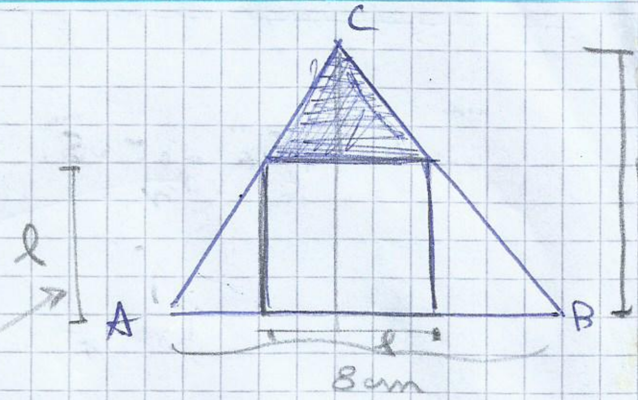
$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^3 & x^2 & x & c \\
 & 6 & 7 & 0 & -1 \\
-1 & & -6 & -1 & 1 \\
\hline
 & 6 & 1 & -1 & \boxed{0}
\end{array} \checkmark$$

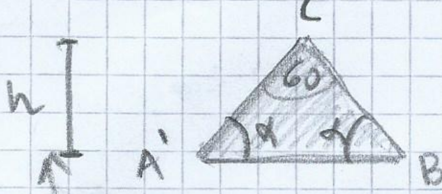
$c(x) = 6x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x_1 = 1/3 \quad x_2 = -1/2}$

$$\boxed{S = \{-1/2;\ 1/3, -1\}}$$

NOTA

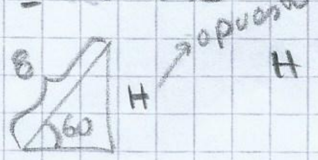
EJ 5 / En el triángulo equilátero $\triangle ABC$ de lado 8 cm se inscribe un cuadrado como muestra la figura.
Calcular el área del triángulo sombreado





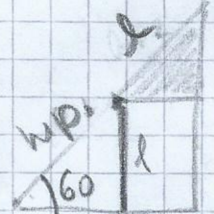
$\alpha = 60°$ (El triángulo sombreado también es equilátero)

$$H = h + l$$



$$H = \text{sen}(60°) \cdot 8\,\text{cm} = \boxed{4\sqrt{3} = H}$$

$$\boxed{4\sqrt{3} = h + l} \qquad \boxed{l = 4\sqrt{3} - h}$$



$$\text{sen}(60°) = \frac{l}{hip} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \boxed{hip = \frac{l \cdot 2}{\sqrt{3}}} \quad \text{(I)}$$

$$hip + l = 8\,\text{cm} \rightarrow \boxed{hip = 8\,\text{cm} - l} \quad \text{(II)}$$

(I) y (II) $\rightarrow \dfrac{l \cdot 2}{\sqrt{3}} = 8\,\text{cm} - l \rightarrow \dfrac{2l}{\sqrt{3}} + l = 8\,\text{cm}$

$$l\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) = 8\,\text{cm}$$

$$l\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = 8\,\text{cm}$$

$$l = 8\,\text{cm} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$\boxed{l = -24 + 16\sqrt{3}\ \text{cm}} \cong 3{,}7128\,\text{cm}$$

$$\text{Área}_\triangle = \frac{l \cdot l \cdot \text{sen}(\alpha)}{2} = \frac{l^2 \,\text{sen}(\alpha)}{2}$$

$$= \frac{(-24+16\sqrt{3})^2 \cdot \text{sen}(60)}{2}$$

aprox $\boxed{A_\blacktriangle = 5{,}969\,\text{cm}^2}$

exacto

$$\left(24^2 - 768\sqrt{3} + 16^2 \cdot 3\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(1344 - 768\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{4} = \left(336\sqrt{3} - 576\right)\text{cm}^2$$

$$\boxed{A_\blacktriangle = \left(336\sqrt{3} - 576\right)\text{cm}^2}$$

NOTA